TEORÍA DE LA MEDIDA

Teorema de Radon-Nikodym

Introducción

Uno de los resultados más importantes de Lebesgue es el que se refiere a la segunda parte del título de su libro. Recordemos que el libro de Lebesgue de 1904 tiene como título *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Con respecto al tema de la búsqueda de funciones primitivas, es decir, dada una función f, determinar, si existe, una función cuya derivada sea f, las investigaciones alrededor de este problema culminaron con un artículo de Otto Nikodym, publicado en 1930 con el título *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, en el cual demostró el ahora llamado teorema de Radon-Nikodym, resultado que permitió definir de manera general un concepto de importancia central en la teoría de los procesos estocásticos, el de Esperanza Condicional.

El tema de la búsqueda de funciones primitivas lo abordó Lebesgue con el estudio de las integrales indefinidas:

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función medible e integrable, la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida mediante la relación $F(x) = \int_a^x f(y)\, dy + K$, donde K es una constante, era llamada por Lebesgue una integral indefinida de f.

Lebesgue demostró que las integrales indefinidas tienen las siguientes tres propiedades:

1. Son funciones continuas.
2. Son de variación acotada.
3. Tienen como derivada a la función de la cual es una integral indefinida, excepto a lo más en los puntos de un conjunto de medida cero.

El estudio que hizo Lebesgue sobre este tema en su libro fue incompleto, se dieron más tarde resultados de otros autores que fueron completando el cuadro. Sin embargo, al final del libro Lebesgue introdujo una propiedad que sería clave para tratar el problema de la relación entre la integral y la derivada; propiedad que, además, llevaría a uno de los resultados más importantes de su teoría de integración.

Después de una serie de razonamientos, concluía Lebesgue:

"Queda así demostrado que toda función de variación acotada $f(x)$ tiene una derivada finita excepto para los valores de x de un conjunto de medida cero [resultado importante en sí mismo]. El razonamiento de la página 122, tal como acaba de ser completado, muestra también que esta derivada es integrable en el conjunto de puntos donde es finita, pero su función primitiva no necesariamente es $f(x)$, como lo muestra el ejemplo de la función $\xi(x)$ de la página 55. El teorema que acaba de ser demostrado es por consiguiente diferente del que concierne a la derivación de las integrales indefinidas; en otros términos, existen funciones continuas de variación acotada, $\xi(x)$ por ejemplo, que no son integrales indefinidas."

El ejemplo al que se refería Lebesgue es el siguiente:

Sea C el conjunto de Cantor, entonces cada $x \in C$ se puede expresar como una serie:

$$x = \tfrac{a_1}{3} + \tfrac{a_2}{3^2} + \tfrac{a_3}{3^3} + \cdots$$

donde $a_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots \in C$, definamos:

$$\xi(x) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a_1}{2} + \tfrac{a_2}{2^2} + \tfrac{a_3}{2^3} + \cdots\right)$$

El $\frac{1}{2}$ es para que cada 2 en el numerador se transforme en 1. De esta forma ξ es una función suprayectiva.

Además, ξ es no decreciente ya que si $x, y \in C$ y $x < y$, entonces, si, en los desarrollos en base 3 de x y y, el m-simo es el primero que es distinto, ese término tiene que ser 0 para x y 2 para y; así que, si $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ son los primeros $m-1$términos de los desarrollos de x y y, se tiene:

$$\xi(x) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a_1}{2} + \tfrac{a_2}{2^2} + \tfrac{a_3}{2^3} + \cdots + \tfrac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \tfrac{a_k}{2^k}$$

$$\xi(y) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a_1}{2} + \tfrac{a_2}{2^2} + \tfrac{a_3}{2^3} + \cdots + \tfrac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \tfrac{1}{2^m} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \tfrac{b_k}{2^k}$$

Por lo tanto:

$\xi(x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^k}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

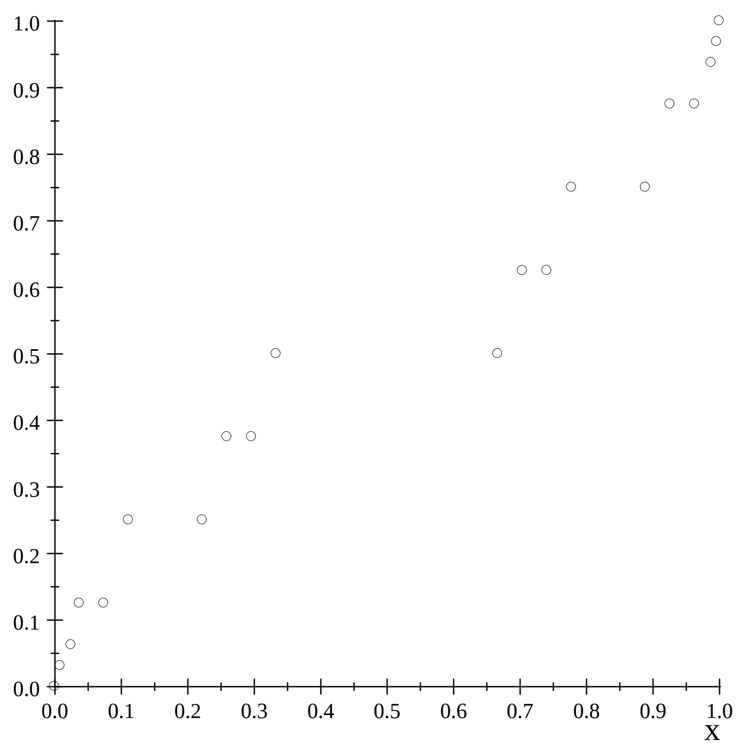
$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m}$

Así que:

$$\xi\left(y\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m} \geq \xi\left(x\right)$$

De manera que las discontinuidades de ξ únicamente pueden ser de saltos; pero al ser ξ suprayectiva como función de C, con valores en el intervalo $[0, 1]$, no puede tener saltos. Por lo tanto, ξ es continua.

A continuación se presentan algunos puntos de la gráfica de ξ.



Para definir ξ en todo el intervalo $[0, 1]$, falta definirla en los intervalos abiertos que se suprimen del intervalo $[0, 1]$ para formar C.

Los desarrollos en base 3 de los extremos de un intervalo que se suprime en el n-simo paso coinciden hasta el término $n-1$, y el término siguiente del extremo izquierdo del intervalo es cero, mientras que el del extremo derecho es 2. Así que, si (c,d) es uno de los intervalos que se suprimen en el paso n, se tiene:

$$c = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0222\cdots$$

$$d = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2000\cdots$$

Así que:

$\xi(c) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$

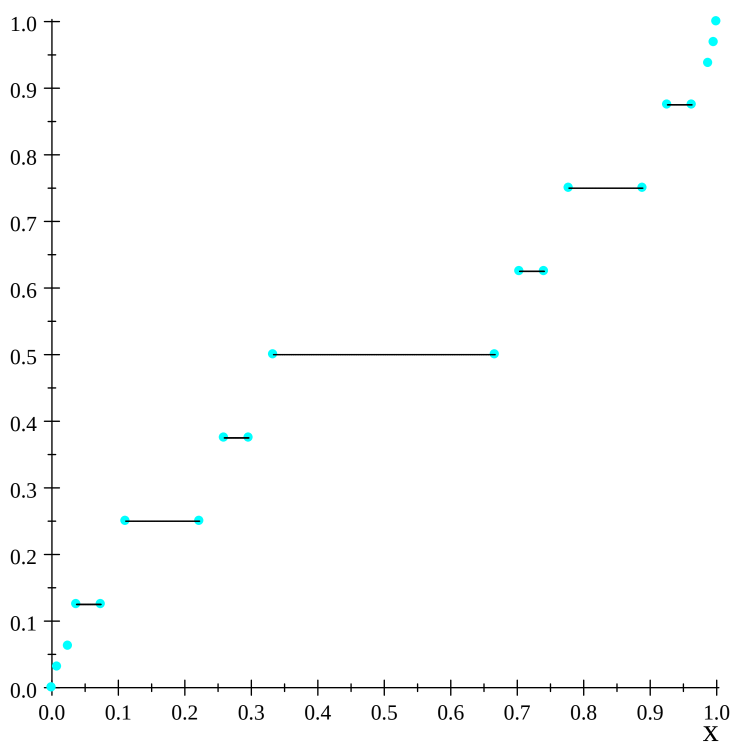
$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n}$

$\xi(d) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right) + \frac{1}{2^n}$

Por lo tanto, $\xi(c) = \xi(d)$.

Definamos $\xi(x) = \xi(c)$ para cualquier $x \in (c,d)$.

ξ es entonces una función continua y no decreciente, definida sobre el intervalo $[0,1]$ y con valores en el mismo intervalo.



Sean $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots$ los intervalos que se suprimen para formar el conjunto de Cantor, entonces:

$$[0,1] = C \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)\right)$$

Supongamos que ξ es una integral indefinida de una función medible e integrable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, entonces existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\xi(x) = \int_0^x f(y)\, dy + K$$

para cualquier $x \in [0,1]$.

ξ es derivable y su derivada es cero en cualquier punto del conjunto $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)$, el cual tiene medida de Lebesgue 1.

Por otra parte, al ser ξ una integral indefinida de f, su derivada es f, excepto a lo más en los puntos de un conjunto de medida cero.

Sean:

$$A = \{x \in (0,1) : \xi'(x) \text{ existe y } \xi'(x) \neq f(x)\}$$

$$B = \{x \in (0,1) : \xi'(x) \text{ no existe o } (\xi'(x) \text{ existe y } \xi'(x) = f(x))\}$$

A tiene entonces medida de Lebesgue cero y B, que es el complemento de A en el intervalo $(0,1)$, tiene medida de Lebesgue 1.

Por lo tanto, $B \cap D$ tiene medida de Lebesgue 1. Además:

$$B \cap D = \{x \in D : \xi'(x) = f(x)\}$$

Así que $f(x) = 0$ para cualquier $x \in B \cap D$.

Por lo tanto $f = 0$ excepto a lo más en un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Se tiene entonces:

$$\int_0^x f(y)\, dy = 0 \text{ para cualquier } x \in [0,1]$$

ξ tendría entonces que ser constante, pero no lo es, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, ξ no es una integral indefinida.

Al final de su libro, Lebesgue agregó una nota después de que afirma que existen funciones continuas de variación acotada que no son integrales indefinidas. Lo que afirma, sin demostración, en esa nota es de una importancia central para el desarrollo de un tema que conduciría al teorema de Radon-Nikodym.

La nota de Lebesgue dice:

"Para que una función sea integral indefinida, se requiere además que su variación total en una infinidad numerable de intervalos de longitud total ℓ, tienda hacia cero con ℓ."

En otras palabras, para que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sea una integral indefinida se requiere que, si $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots$ son intervalos contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas, entonces:

$$\text{lím}_{(b_k - a_k)\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = 0$$

Es decir, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier sucesión de intervalos ajenos por parejas $((a_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a, b]$ y tales que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$.

Esta propiedad es equivalente a la siguiente:

Dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier colección finita de intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n), contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$.

En efecto, supongamos que se tiene la primera propiedad y, dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta \in (0, b - a)$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier sucesión de intervalos ajenos $([a_k, b_k])_{k\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a, b]$ y tales que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$. Entonces, dada cualquier colección finita de intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n), contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, podemos agregar a esa familia una colección infinita numerables de intervalos (a_{n+1}, bn_{+1}), (a_{n+2}, b_{n+2}), $\ldots$, contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas, sin puntos en común con los primeros n intervalos y tales que $\sum_{k=n+1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$; así que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$ y entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Inversamente, supongamos que se tiene la segunda propiedad y, dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ para cualquier colección finita de intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n), contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Consideremos una sucesión de intervalos ajenos por parejas $((a_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a, b]$ y tales que $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$; entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n) están contenidos en $[a, b]$, son ajenos por parejas y $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$; por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Así que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(b_k) - F(a_k)| = \text{lím}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

La segunda propiedad es la definición moderna de una función absolutamente continua. Así que, lo que afirmó Lebesgue es que, para que una función de variación acotada sea una integral indefinida se requiere que sea absolutamente continua. Agregó, en la misma nota, también sin demostración, que esta condición no únicamente es necesaria para que una función sea una integral indefinida, sino que también es suficiente.

En 1905, Giuseppe Vitali publicó una demostración de la afirmación de Lebesgue en un artículo titulado *Sulle funzioni integrali*, extendiendo el resultado al caso multidimensional. Fue Vitali quien dio el nombre de continuidad absoluta a la propiedad enunciada por Lebesgue. Más tarde, en 1907, Lebesgue publicó su propia demostración en un artículo titulado *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration*.

En resumen, los resultados de Lebesgue y Vitali, para el caso unidimensional, son los siguientes:

1. Una función es una integral indefinida si y sólo si es absolutamente continua.
2. Toda integral indefinida es de variación acotada.
3. Si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida de la función f, entonces existe un conjunto A de medida cero tal que $F'(x)$ existe para cualquier $x \notin A$ y $F'(x) = f(x)$.
4. No toda función de variación acotada continua es una integral indefinida. Existen funciones de variación acotadas continuas, no constantes, cuya derivada es cero excepto a lo más en un conjunto de medida de Lebesgue cero, así que tales funciones no son integrales indefinidas.

En 1910 Lebesgue publicó un artículo, titulado *L'intégration des fonctions discontinues*, donde profundizó el estudio de las integrales indefinidas. En ese artículo analizó las integrales definidas para el caso multidimensional, planteando un nuevo enfoque (al parecer, influenciado por un trabajo de Vitali, de 1907-1908, sobre el mismo tema), el cual sería retomado por Johann Radon, en el año 1913, en un artículo que sentó las bases para desarrollar una teoría general de la medida.

En ese mismo artículo de 1910, Lebesgue demostró el ahora conocido como el teorema de la convergencia dominada, el cual afirma que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, y $|f_n| \leq g$, donde g es una función medible cuya integral es finita, entonces:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int f_n(y)\,dy$$

El cambio de enfoque de Lebesgue para tratar el tema de las integrales definidas consistió en considerarlas como funciones definidas sobre los conjuntos medibles. Especificamente, consideró una integral indefinida como una función F que asigna a cada conjunto medible E la integral $\int_E f\,(P)\,dP$, donde f es una función medible e integrable y P representa un elemento de $\mathbb{R}^n$. Demostró entonces que una función así definida tiene las siguientes dos propiedades:

1. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles tales que $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{n\to\infty} F(E_n) = 0$.
2. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles, ajenos por parejas, entonces: $F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$

En el artículo de Lebesgue, una función que satisface la propiedad 2 es llamada aditiva.

En 1913, Johann Radon dio un nuevo paso importante alrededor de este problema al plantearlo de una manera más general. Radon retomó el concepto de función aditiva definida sobre una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, el cual había sido definido por Lebesgue en su artículo de 1910, pero el problema de las integrales definidas lo planteó como un problema de la relación entre dos funcionales aditivas de acuerdo con la siguiente definición:

Sean b y f dos funcionales aditivas definidas las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, T_b y T_f, respectivamente. Se dice que f es de base b si b es no negativa y si, para cualquier conjunto $E \in T_b \cap T_f$, la relación $b(E) = 0$ implica que $f(E) = 0$.

Bajo una condición adicional mostró que si f es de base b, entonces $T_f \subset T_b$ y demostró el siguiente resultado:

Si la funcional aditiva f es de base b, entonces existe una función Ψ, integrable con respecto a b, tal que $f(E) = \int_E \Psi db$ para cualquier conjunto $E \in T_f$.

Otton Nikodym, en su artículo de 1930, retomó el trabajo de Radon y obtuvo un resultado general, ahora conocido como el teorema de Radon-Nikodym.

Nikodym hacía referencia en su artículo a la formulación general que hizo Fréchet de la teoría de la medida de Lebesgue, pero modificó un poco la terminología. Consideraba una familia no vacía $\mathcal{H}$ de subconjuntos de un conjunto H, la cual es cerrada bajo uniones numerables y complementos (en particular H pertenece a la familia); es decir, lo que ahora se denomina σ-álgebra de subconjuntos de H. Una medida μ la definió entonces como una función (con valores reales), no negativa, definida sobre $\mathcal{H}$, la cual es "perfectamente aditiva", es decir, si $E_1, E_2, \ldots$ son elementos de la familia, ajenos por parejas, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} En\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(En)$; es decir, μ es σ-aditiva, en la terminología moderna. En otras palabras, Nikodym trabajaba con medidas tal y como las define actualmente ($\mu(\emptyset) = 0$ se sigue de la σ-aditividad).

Dada una medida μ sobre $\mathcal{H}$, definió la μ-distancia entre dos elementos E y F de $\mathcal{H}$ de la siguiente manera:

$$||E, F||_{\mu} = \mu(E - F) + \mu(F - E)$$

Si ν es una función con valores reales definida sobre $\mathcal{H}$, llamaba a ν μ-continua si para cualquier sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{H}$ tales que:

$$\text{lím}_{n \to \infty} ||E_n, E||_{\mu} = 0$$

donde $E \in \mathcal{H}$, se tiene $\text{lím}_{n \to \infty} \nu(E_n) = \nu(E)$.

Después de que desarrolló la teoría de integración con respecto a una medida μ, demostró el resultado central de su artículo:

Si ν es perfectamente aditiva, entonces las 4 condiciones siguientes son equivalentes:

1. ν es μ-continua.
2. Para cualquier conjunto $E \in \mathcal{H}$, si $\nu(E) \neq 0$ entonces $\mu(E) > 0$.
3. Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tales que $\text{lím}_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0$, entonces $\text{lím}_{n \to \infty} \nu(E_n) = 0$.
4. Existe una función μ-integrable $f : H \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$, para cualquier conjunto $E \in \mathcal{H}$.

Con este trabajo de Nikodym quedó formulada la teoría de la medida como se le conoce actualmente y quedaron establecidos los resultados básicos de la teoría de integración con respecto a una medida.

Medidas con signo

Definición 1. *Se dice que una función* $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *es* σ*-aditiva si* μ *toma a lo más uno de los valores* $+\infty$ *y* $-\infty$*, y, dada cualquier familia numerable,* $A_1, A_2, \ldots,$ *de elementos de* $\Im$ *tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$*, entonces* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$*, donde la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *converge absolutamente cuando* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathbb{R}$.

Definición 2. *Se dice que* $\nu : \Im \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *es una medida con signo si se cumplen las siguientes condiciones*

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. ν *es* σ*-aditiva.*

Definición 3. *Sea* ν *una medida con signo y* $A \in \Im$*. Se dice que* A *es un conjunto positivo (resp. negativo) con respecto a* ν *si* $\nu(E) \geq 0$ *(resp.* $\nu(E) \leq 0$*) para cualquier conjunto medible* $E \subset A$.

Proposición 1. *La unión de una colección finita o infinita numerable de conjuntos positivos es un conjunto positivo.*

Demostración

Sea $\{A_n\}$ una colección finita o infinita numerable de conjuntos positivos, $A = \bigcup_n A_n$, E un conjunto medible contenido en A y $E'_n = E \cap A_n \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c$. Entonces los conjuntos E'_n son ajenos por parejas, $E = \bigcup_n E'_n$ y, como $E'_n \subset A_n$, $\nu(E'_n) \geq 0$; así que $\nu(E) \geq 0$.

■

Teorema 1. *Sea* ν *una medida con signo y* E *un conjunto medible tal que* $0 < \nu(E) < \infty$*. Entonces existe un conjunto positivo* $A \subset E$ *tal que* $0 < \nu(A) < \infty$ *y* $C = E - A$ *es un conjunto negativo.*

Demostración

La idea consiste en irle quitando al conjunto E conjuntos medibles de medida negativa hasta legar a un conjunto con la propiedad deseada.

Obsérvese que si B es un subconjunto de E de medida menor o igual a 0, entonces, como $E = B \cup (E - B)$, se tiene $0 < \nu(E - B) < \infty$.

Por otra parte, E no contiene subconjuntos de medida $-\infty$ pues si B fuera un subconjunto medible de E de medida $-\infty$, se tendría $E = B \cup (E - B)$, con $\nu(E - B) < \infty$, así que $\nu(E) = -\infty$.

E tampoco contiene subconjuntos de medida ∞ pues si B fuera un subconjunto medible de E de medida ∞, se tendría $E = B \cup (E - B)$, con $\nu(E - B) > -\infty$, así que $\nu(E) = \infty$.

Ahora obsérvese que dada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto medible $B \subset E$ tal que $\nu(B) \leq 0$ y $E - B$ no contiene ningún subconjunto de medida menor que $-\varepsilon$. En efecto, si no existe un conjunto medible $B_1 \subset E$ tal que $\nu(B_1) < -\varepsilon$, tomemos $B = \emptyset$; en otro caso, si no existe un conjunto medible $B_2 \subset E - B_1$ tal que $\nu(B_2) < -\varepsilon$, tomemos $B = B_1$; en otro caso, si no existe un conjunto medible $B_3 \subset E - B_1 \cup B_2$ tal que $\nu(B_3) < -\varepsilon$, tomemos $B = B_1 \cup B_2$. Continuando con este procedimiento, se llega, en un número finito de pasos, a la obtención de un conjunto B con la propiedad deseada, pues si el procedimiento continuara indefinidamente obtendríamos una colección infinita de conjuntos medibles contenidos en E, ajenos por parejas, cuya unión sería un subconjunto medible de E de medida $-\infty$.

Tomemos entonces un conjunto medible $B_1 \subset E$ tal que $\nu(B_1) \leq 0$ y $E - B_1$ no contiene ningún subconjunto de medida menor que -1. Inductivamente podemos obtener una colección infinita $B_1, B_2, \ldots$ de conjuntos medibles contenidos en E, ajenos por parejas y tales que $E - \cup_{k=1}^{n} B_k$ no contiene ningún subconjunto de medida menor que $-\frac{1}{n}$. Definiendo $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$, se tiene que $\nu(B) \leq 0$ y $A = E - B$ no contiene ningún subconjunto medible de medida negativa, es decir, es un conjunto positivo tal que $0 < \nu(A) < \infty$.

Hemos demostrado hasta aquí que existe un conjunto positivo $A \subset E$ tal que $0 < \nu(A) < \infty$.

Sea A_1 un conjunto positivo cualquiera tal que $A_1 \subset E$ y $0 < \nu(A_1) < \infty$.

Demostremos ahora que dada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto positivo $A \subset E$ tal que $0 < \nu(A) < \infty$ y $E - A$ no contiene ningún conjunto positivo de medida mayor que ε. En efecto, si no existe un conjunto positivo $A_2 \subset E - A_1$ tal que $\nu(A_2) > 1$, tomemos $A = A_1$; en otro caso, si no existe un conjunto positivo $A_3 \subset E - A_1 \cup A_2$ tal que $\nu(A_3) > 1$, tomemos $A = A_1 \cup A_2$; en otro caso, si no existe un conjunto positivo $A_4 \subset E - A_1 \cup A_2 \cup A_3$ tal que $\nu(A_3) > 1$, tomemos $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Continuando con este procedimiento, se llega, en un número finito de pasos, a la obtención de un conjunto A con la propiedad deseada, pues si el procedimiento continuara indefinidamente obtendríamos una colección infinita de conjuntos medibles contenidos en E, ajenos por parejas, cuya unión sería un subconjunto medible de E de medida ∞.

Tomemos entonces un conjunto positivo $A_1 \subset E$ tal que $0 < \nu(A_1) < \infty$ y $E - A_1$ no contiene ningún conjunto positivo de medida mayor que 1. Inductivamente podemos obtener una colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de conjuntos medibles contenidos en E, ajenos por parejas y tales que $E - \cup_{k=1}^{n} B_k$ no contiene ningún subconjunto de medida menor que $-\frac{1}{n}$. Definiendo $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$, se tiene que $\nu(B) \leq 0$ y $A = E - B$ no contiene ningún subconjunto medible de medida negativa, es decir, es un conjunto positivo tal que $0 < \nu(A) < \infty$.

Si E es un conjunto positivo, definimos $A = E$ y termina la demostración. En otro caso, existe un conjunto medible $B \subset E$ tal que $\nu(B) < 0$. Sea n_1 el más pequeño entero positivo para el cual existe un conjunto medible $B \subset E$ tal que $\nu(B) < -\frac{1}{n_1}$, B_1 un conjunto medible con esa propiedad y $E_1 = E - B_1$. Entonces se tiene $0 < \nu(E_1) < \infty$.

Si E_1 es un conjunto positivo, definimos $A = E_1$ y termina la demostración. En otro caso, existe un conjunto medible $B \subset E_1$ tal que $\nu(B) < 0$. Sea n_2 el más pequeño entero positivo para el cual existe un conjunto medible $B \subset E_1$ tal que $\nu(B) < -\frac{1}{n_2}$, B_2 un conjunto medible con esa propiedad y $E_2 = E_1 - B_2$. Entonces se tiene $0 < \nu(E_2) < \infty$.

Continuando con este proceso, o bien se llega al resultado deseado en un número finito de pasos, o bien se obtiene una sucesión de enteros positivos (n_k) y sucesión (B_k) de subconjuntos medibles de E tales que, para cualquier $k \in \mathbf{N}$, $\nu(B_k) < -\frac{1}{n_k}$ y $\nu(B) \geq -\frac{1}{n_k - 1}$ para cualquier subconjunto medible $B \subset E - \bigcup_{j=1}^{k} B_j$. En este último caso, sea $A = E - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Entonces se tiene $0 < \nu(A) < \infty$.

Obsérvese ahora que necesariamente se tiene $n_k \leq n_{k+1}$. Además, cada término n_k se repite, a lo más, un número finito de veces pues de otra manera la unión de los correspondientes conjuntos B_k sería un conjunto medible de E de medida $-\infty$. Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$.

Finalmente, como $A \subset E - \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ para cualquier $k \in \mathbf{N}$, entonces, dado cualquier subconjunto medible $B \subset A$ se tiene $\nu(B) \geq -\frac{1}{n_k - 1}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tomando límite cuando $k \to \infty$, se tiene $\nu(B) \geq 0$, así que A es un conjunto positivo.

■

Teorema 2 (**Teorema de descomposición de Hahn**). *Sea ν una medida con signo. Entonces existe un conjunto positivo A y un conjunto negativo B tales que $A \cap B = \emptyset$ y $\mathbb{F} = A \cup B$.*

Demostración

La idea consiste en lo siguiente:

Si ν no toma el valor $+\infty$, se trata de encontrar un conjunto positivo de medida máxima. El complemento de ese conjunto es entonces, necesariamente, un conjunto negativo.

Si ν no toma el valor $-\infty$, se trata de encontrar un conjunto negativo de medida mínima. El complemento de ese conjunto es entonces, necesariamente, un conjunto positivo.

Supongamos que ν no toma el valor $+\infty$.

Sea $\lambda = \sup \{\nu(A) : A \text{ es un conjunto positivo con respecto a } \nu\}$.

Como el conjunto vacío es positivo, se tiene $\lambda \geq 0$.

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos positivos tales que $\lambda = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$ y sean $A = \bigcup_n A_n$ y $B = A^c$.

A es un conjunto positivo por ser la unión numerable de conjuntos positivos.

Por ser A un conjunto positivo, se tiene $\lambda \geq \nu(A)$. Por otra parte, $A - A_n \subset A$ para cualquier n, así que $\nu(A - A_n) \geq 0$. Así que, $\nu(A) = v(A_n) + \nu(A - A_n) \geq v(A_n)$ para cualquier n. Por lo tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$, se tiene $\nu(A) \geq \lambda$. Se concluye entonces que $\lambda = \nu(A)$, así que $\lambda < \infty$.

Para probar que B es un conjunto negativo, supongamos que existe un conjunto medible $E \subset B$ tal que $\nu(E) > 0$, entonces, por la proposición 1, existe un conjunto positivo $D \subset E$ tal que $\nu(D) > 0$. Por lo tanto, $A \cup D$ es un conjunto positivo y como A y D son ajenos, se tiene $\lambda \geq \nu(A \cup D) = \nu(A) + \nu(D) = \lambda + \nu(D) > \lambda$, lo cual es una contradicción.

■

Definición 4. *Sea ν una medida con signo. Entonces una pareja de conjuntos medibles (A, B) tales que A es positivo, B es negativo, $A \cap B = \emptyset$ y $\mathbb{F} = A \cup B$, es llamada una descomposición de Hahn para ν.*

Teorema 3. *Sea $\nu : (\mathbb{F}, \Im) \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ una medida con signo, entonces existen dos medidas ν^+ y ν^- sobre $(\mathbb{F}, \Im)$ con las siguientes propiedades:*

1. *Por lo menos una de las dos medidas, ν^+ y ν^-, es finita.*
2. $\nu = \nu^+ - \nu^-$
3. *Existen dos conjuntos $A, B \in \Im$ tales que $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{F} = A \cup B$ y $\nu^- (A) = \nu^+ (B) = 0$.*

Además, las medidas ν^+ y ν^-, con estas propiedades, son únicas.

Demostración

Sea (A, B) una descomposición de Hahn para ν.

Para cada $E \in \Im$ definamos:

$$\nu^+ (E) = \nu (E \cap A)$$

$$\nu^- (E) = -\nu (E \cap B)$$

ν^+ y ν^- son entonces medidas sobre $(\mathbb{F}, \Im)$ tales que:

$\nu^- (A) = \nu^+ (B) = 0$ y $\nu (E) = \nu^+ (E) - \nu^- (E)$ para cualquier $E \in \Im$.

Como ν toma a lo más uno de los valores $+\infty$ y $-\infty$, por lo menos una de las dos medidas, ν^+ y ν^-, es finita.

Para la unicidad, supongamos que $\left(\nu_1^+, \nu_1^-\right)$ y $\left(\nu_2^+, \nu_2^-\right)$ son dos parejas de medidas sobre $(\mathbb{F}, \Im)$ que satisfacen las propiedades 1, 2 y 3, y sean $A_1, B_1,\ A_2, B_2 \in \Im$ tales que:

$$A_1 \cap B_1 = \emptyset,\ \mathbb{F} = A_1 \cup B_1 \text{ y } \nu_1^- \left(A_1\right) = \nu_1^+ \left(B_1\right) = 0$$

$$A_2 \cap B_2 = \emptyset,\ \mathbb{F} = A_2 \cup B_2 \text{ y } \nu_2^- \left(A_2\right) = \nu_2^+ \left(B_2\right) = 0$$

Se tiene entonces:

$$\nu \left(A_1 \cap B_2\right) = \nu_1^+ \left(A_1 \cap B_2\right) - \nu_1^- \left(A_1 \cap B_2\right) = \nu_1^+ \left(A_1 \cap B_2\right) \geq 0$$

$$\nu \left(A_1 \cap B_2\right) = \nu_2^+ \left(A_1 \cap B_2\right) - \nu_2^- \left(A_1 \cap B_2\right) = -\nu_2^- \left(A_1 \cap B_2\right) \leq 0$$

$$\nu \left(A_2 \cap B_1\right) = \nu_1^+ \left(A_2 \cap B_1\right) - \nu_1^- \left(A_2 \cap B_2\right) = -\nu_1^- \left(A_2 \cap B_2\right) \leq 0$$

$$\nu \left(A_2 \cap B_1\right) = \nu_2^+ \left(A_2 \cap B_1\right) - \nu_2^- \left(A_2 \cap B_1\right) = \nu_2^+ \left(A_2 \cap B_1\right) \geq 0$$

Así que, $\nu \left(A_1 \cap B_2\right) = \nu \left(A_2 \cap B_1\right) = 0$.

Por lo tanto:

$$\nu_1^+ \left(A_1 \cap B_2\right) = \nu_1^- \left(A_1 \cap B_2\right) = 0$$

$$\nu_2^+ \left(A_1 \cap B_2\right) = \nu_2^- \left(A_1 \cap B_2\right) = 0$$

$$\nu_1^+ \left(A_2 \cap B_1\right) = \nu_1^- \left(A_2 \cap B_1\right) = 0$$

$$\nu_2^+ \left(A_2 \cap B_1\right) = \nu_2^- \left(A_2 \cap B_1\right) = 0$$

Entonces:

Si $C \in \Im$ y $C \subset A_1$, se tiene:

$$\nu \left(C \cap A_2\right) = \nu_1^+ \left(C \cap A_2\right) = \nu_1^+ \left(C \cap A_2\right) + \nu_1^+ \left(C \cap B_2\right) = \nu_1^+ \left(C\right)$$

$$\nu \left(C \cap A_2\right) = \nu_2^+ \left(C \cap A_2\right) = \nu_2^+ \left(C \cap A_2\right) + \nu_2^+ \left(C \cap B_2\right) = \nu_2^+ \left(C\right)$$

Por lo tanto:

$$\nu_1^+ \left(C\right) = \nu_2^+ \left(C\right)$$

Así que ν_1^+ y ν_2^+ son iguales sobre A_1.

Además:

$$\nu_2^+ (B_1) = \nu_2^+ (B_1 \cap A_2) + \nu_2^+ (B_1 \cap B_2) = 0$$

Así que, ν_1^+ y ν_2^+ son iguales sobre B_1.

Por lo tanto, ν_1^+ y ν_2^+ son iguales sobre $\mathbb{F}$, es decir, $\nu_1^+ = \nu_2^+$.

Si $D \in \Im$ y $D \subset B_1$, se tiene:

$$\nu (D \cap B_2) = -\nu_1^- (D \cap B_2) = -\nu_1^- (D \cap B_2) - \nu_1^- (D \cap A_2) = -\nu_1^- (D)$$
$$\nu (D \cap B_2) = -\nu_2^- (D \cap B_2) = -\nu_2^- (D \cap B_2) - \nu_2^- (D \cap A_2) = -\nu_2^- (D)$$

Por lo tanto:

$$\nu_1^- (D) = \nu_2^- (D)$$

Así que ν_1^- y ν_2^- son iguales sobre B_1.

Además:

$$\nu_2^- (A_1) = \nu_2^- (A_1 \cap A_2) + \nu_2^- (A_1 \cap B_2) = 0$$

Así que, ν_1^- y ν_2^- son iguales sobre A_1.

Por lo tanto, ν_1^- y ν_2^- son iguales sobre $\mathbb{F}$, es decir, $\nu_1^- = \nu_2^-$.

■

Corolario 1. *Sea* $\nu : (\mathbb{F}, \Im) \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *una medida con signo, Entonces:*

i) Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Im$, se tiene:

$$\nu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

ii) Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Im$, tales que $\nu(A_1) < \infty$, se tiene:

$$\nu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

Demostración

Sean ν^+ y ν^- dos medidas sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ tales que:

1. Por lo menos una de las dos medidas, ν^+ y ν^-, es finita.

2. $\nu = \nu^+ - \nu^-$

3. Existen dos conjuntos $A, B \in \Im$ tales que $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{F} = A \cup B$ y $\nu^-(A) = \nu^+(B) = 0$.

i) Se tiene:

$$\nu^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \nu^+(A_n)$$

$$\nu^-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \nu^-(A_n)$$

Como por lo menos una de las dos medidas, ν^+ y ν^-, es finita, se tiene que $\nu^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ y $\nu^-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ no pueden ser ambas ∞. Así que:

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \nu^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \nu^-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\infty} \left(\nu^+(A_n) - \nu^-(A_n)\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

ii) Como por lo menos una de las dos medidas, ν^+ y ν^-, es finita, se tiene $\nu^+(A_1) < \infty$ y $\nu^-(A_1) < \infty$. Así que:

$$\nu^+\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \nu^+(A_n) < \infty$$

$$\nu^-\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \nu^-(A_n) < \infty$$

Por lo tanto:

$$\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \nu^+\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \nu^-\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \left(\nu^+(A_n) - \nu^-(A_n)\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

■

Los siguientes resultados se demuestran de forma idéntica a la realizada en el caso de las medidas.

Proposición 2. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y ν_1 y ν_2 dos medidas con signo definidas sobre $\sigma(\mathcal{A})$, tales que $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$. Supongamos además que existe una sucesión creciente $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{F}$ y, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\nu_1(F_n) = \nu_2(F_n) < \infty$ y $\nu_1(A \cap F_n) = \nu_2(A \cap F_n)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$. Entonces $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ para cualquier $A \in \sigma(\mathcal{A})$.*

Proposición 3. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{P}$ un π-sistema de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y ν_1 y ν_2 dos medidas con signo definidas sobre $\sigma(\mathcal{P})$, tales que $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{P}$. Supongamos además que existe una sucesión creciente $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\sigma(\mathcal{P})$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{F}$ y, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\nu_1(F_n) = \nu_2(F_n) < \infty$ y $\nu_1(A \cap F_n) = \nu_2(A \cap F_n)$ para cualquier $A \in \mathcal{P}$. Entonces $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ para cualquier $A \in \sigma(\mathcal{P})$.*

Teorema de Radon-Nikodym

Dadas dos medidas μ y ν, ambas definidas sobre $\Im$, ¿bajo que condiciones existe una función medible no negativa f tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cualquier $E \in \Im$? En esta sección se dará respuesta a esta pregunta.

Dada una función medible $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$, la familia de conjuntos medibles $B_\alpha = [f \leq \alpha]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es creciente en el sentido de que si $\alpha < \beta$ entonces $B_\alpha \subset B_\beta$. Cabe entonces preguntarse si, dada una familia creciente de conjuntos medibles $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{R}}$, existe una función medible $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $B_\alpha = [f \leq \alpha]$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para definir tal función, dado un punto $x \in \mathbb{F}$, se debe de tener $f(x) \leq \alpha$ para cualquier α tal que $x \in B_\alpha$, así que:

$$f(x) \leq \text{ínf}\,\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in B_\alpha\}$$

Además, si $f(x) < \text{ínf}\,\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in B_\alpha\}$, entonces podría existir β tal que $x \notin B_\beta$ y $f(x) < \beta < \text{ínf}\,\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in B_\alpha\}$. En este caso se tendría $f(x) \leq \beta$, pero $x \notin B_\beta$, así que $B_\beta \neq [f \leq \beta]$.

La definición natural de f es entonces $f(x) = \text{ínf}\,\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in B_\alpha\}$, aunque con esta definición f podría no ser medible. El siguiente lema precisa el resultado que se tiene en este sentido.

Lema 1. *Sea D un conjunto numerable de números reales y $\{B_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una familia de conjuntos medibles tales que si $\alpha < \beta$ entonces $B_\alpha \subset B_\beta$. Entonces existe una función medible $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $[f < \alpha] \subset B_\alpha \subset [f \leq \alpha]$ para cualquier $\alpha \in D$.*

Demostración

Para cada $x \in \mathbb{F}$, sea $f(x) = \text{ínf}\,\{\alpha \in D : x \in B_\alpha\}$. Inmediatamente se tiene la contención $B_\alpha \subset [f \leq \alpha]$ para cualquier $\alpha \in D$.

Ahora bien, si α es cualquier número real y $f(x) < \alpha$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $\beta \in D$ y $x \in B_\beta$, así que $[f < \alpha] \subset \bigcup_{\{\beta \in D : \beta < \alpha\}} B_\beta$. Por otra parte, si $x \in B_\beta$ para alguna $\beta \in D$ con $\beta < \alpha$, entonces $f(x) \leq \beta < \alpha$, así que $\bigcup_{\{\beta \in D : \beta < \alpha\}} B_\beta \subset [f < \alpha]$. Por lo tanto, $[f < \alpha] = \bigcup_{\{\beta \in D : \beta < \alpha\}} B_\beta$, lo cual muestra que f es medible y que $[f < \alpha] \subset B_\alpha$ para cualquier $\alpha \in D$.

■

Definición 5. *Sean μ y ν dos medidas. Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ, lo cual será denotado por $\nu \ll \mu$, si $\nu(E) = 0$ para cualquier conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$.*

Si μ es una medida y f una función medible no negativa, entonces $\nu : \Im \to \mathbb{R}$ definida por $\nu(E) = \int_E f d\mu$ es una medida absolutamente continua con respecto a μ.

Teorema 4 (Radon-Nikodym). *Sean μ y ν dos medidas. Supongamos que μ es finita y que ν es absolutamente continua con respecto a μ, entonces existe una función medible no negativa f tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cualquier conjunto medible E.*

Demostración

Para cada número racional definamos la medida con signo $\nu_\alpha = v - \alpha\mu$ y sea (A_α, B_α) una descomposición de Hahn para ν_α. Para $\alpha = 0$ tomemos $A_0 = X$ y $B_0 = \emptyset$.

Sea $\alpha < \beta$ entonces, como $B_\alpha - B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$, se tiene $B_\alpha - B_\beta \subset A_\beta$ y $B_\alpha - B_\beta \subset B_\alpha$. Por lo tanto, $\nu_\beta(B_\alpha - B_\beta) \geq 0$ y $\nu_\alpha(B_\alpha - B_\beta) \leq 0$, es decir, $v(B_\alpha - B_\beta) - \beta\mu(B_\alpha - B_\beta) \geq 0$ y $v(B_\alpha - B_\beta) - \alpha\mu(B_\alpha - B_\beta) \leq 0$, así que $\beta\mu(B_\alpha - B_\beta) \leq v(B_\alpha - B_\beta) \leq \alpha\mu(B_\alpha - B_\beta)$, de lo cual se sigue $\mu(B_\alpha - B_\beta) = 0$.

Sea $F = \bigcup_{\{\alpha,\beta\in\mathbf{Q}:\alpha<\beta\}}(B_\alpha - B_\beta)$. Entonces $\mu(F) = 0$ y $B_\alpha - F \subset B_\beta - F$ para cualquier pareja de racionales α y β tales que $\alpha < \beta$.

Definamos $B'_\alpha = B_\alpha - F$ y $A'_\alpha = (B'_\alpha)^c$ para cualquier número racional α. Entonces A_α y B_α difieren de A'_α y B'_α, respectivamente, por un conjunto de medida μ igual a cero, el cual también tiene medida ν igual a cero ya que ν es absolutamente continua con respecto a μ. Esto implica que, para cada α racional, la pareja $(A'_\alpha$ y $B'_\alpha)$ es también una descomposición de Hahn para ν_α. Obsérvese, además, que se sigue teniendo $A'_0 = X$ y $B'_0 = \emptyset$.

Para simplificar la notación, se puede asumir que esta nueva descomposición de Hahn es la que se toma inicialmente. De esta forma, la familia $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{Q}}$ es creciente.

Por el lema 1 existe una función medible $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que, para cualquier número racional α, $[f < \alpha] \subset B_\alpha \subset [f \leq \alpha]$.

Como $B_0 = \emptyset$, $[f < 0] = \emptyset$, así que f es no negativa.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \leq f \leq \beta$ sobre $B_\beta - B_\alpha = B_\beta \cap A_\alpha$, así que, si $E \in \Im$ y $E_{\alpha\beta} = E \cap (B_\beta - B_\alpha)$, entonces:

$$\alpha\mu(E_{\alpha\beta}) \leq \int_{E_{\alpha\beta}} f d\mu \leq \beta\mu(E_{\alpha\beta}) \tag{1}$$

Por otra parte, como $E_{\alpha\beta} \subset B_\beta \cap A_\alpha$, se tiene $\nu_\alpha(E_{\alpha\beta}) \geq 0$ y $\nu_\beta(E_{\alpha\beta}) \leq 0$, es decir, $\nu(E_{\alpha\beta}) - \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) \geq 0$ y $\nu(E_{\alpha\beta}) - \beta\mu(E_{\alpha\beta}) \leq 0$. Así que:

$$\alpha\mu(E_{\alpha\beta}) \leq \nu(E_{\alpha\beta}) \leq \beta\mu(E_{\alpha\beta}) \tag{2}$$

Combinando las desigualdades 1 y 2, se obtiene:

$$(3) \qquad \nu(E_{\alpha\beta}) - (\beta-\alpha)\mu(E_{\alpha\beta}) \leq \int_{E_{\alpha\beta}} f d\mu \leq \nu(E_{\alpha\beta}) + (\beta-\alpha)\mu(E_{\alpha\beta})$$

En particular, si, para cada $N \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos $B_0, B_{\frac{1}{N}}, B_{\frac{2}{N}}, \ldots$ y, para cada $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, definimos $E_k = E \cap \left(B_{\frac{k+1}{N}} - B_{\frac{k}{N}}\right)$, aplicando 3 para cada k, se tiene:

$$(4) \qquad \nu(E_k) - \frac{1}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} f d\mu \leq \nu(E_k) + \frac{1}{N}\mu(E_k).$$

De manera que, como los conjuntos E_k son ajenos por parejas, sumando sobre k cada término de la desigualdad 4, se obtiene:

$$(5) \qquad \nu(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k) - \frac{1}{N}\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k) \leq \int_{\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k} f d\mu \leq \nu(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k) + \frac{1}{N}\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k)$$

Sea ahora $E_\infty = E - \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\frac{k}{N}}$.

Como $[f < \infty] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\frac{k}{N}}$, se tiene $f = \infty$ sobre E_∞. Por otra parte, para cualquier $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, se tiene $E_\infty \subset A_{\frac{k}{N}}$, así que $\nu(E_\infty) - \frac{k}{N}\mu(E_\infty) \geq 0$, es decir, $\nu(E_\infty) \geq \frac{k}{N}\mu(E_\infty)$. Por lo tanto, si $\mu(E_\infty) > 0$, entonces $\nu(E_\infty) = \infty$. Por otra parte, si $\mu(E_\infty) = 0$, entonces $\nu(E_\infty) = 0$ ya que ν es absolutamente continua con respecto a μ. Por lo tanto, en cualquier caso se tiene:

$$(6) \qquad \nu(E_\infty) = \int_{E_\infty} f d\mu$$

Finalmente, como $E = E_\infty \cup [\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k]$ y los conjuntos E_∞ y $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ son ajenos, se tiene $\nu(E) = \nu(E_\infty) + \nu(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k)$ y $\int_E f d\mu = \int_{E_\infty} f d\mu + \int_{\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k} f d\mu$. Además, $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k) \leq \mu(E)$. Así que, combinando 5 y 6, se obtiene:

$$\nu(E) - \frac{1}{N}\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq \nu(E) + \frac{1}{N}\mu(E)$$

Siendo μ finita y $N \in \mathbb{N}$ arbitraria, se concluye $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

$\blacksquare$

Corolario 2. *Sean μ y ν dos medidas. Supongamos que μ es σ-finita y que ν es absolutamente continua con respecto a μ, entonces existe una función medible no negativa f tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cualquier conjunto medible E.*

Demostración

Sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una colección infinita numerable de conjuntos, ajenos por parejas, $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $\mu_k : \Im \mapsto \mathbb{R}$ y $\nu_k : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ definidas por:

$$\mu_k(E) = \mu(E \cap E_k)$$

$$\nu_k(E) = \nu(E \cap E_k)$$

μ_k y ν_k son medidas y μ_k es finita.

Además, si $E \in \Im$ y $\mu_k(E) = 0$, entonces $\mu(E \cap E_k)$, así que $\nu_k(E) = \nu(E \cap E_k) = 0$.

Por lo tanto, ν_k es absolutamente continua con respecto a μ_k. Así que existe una función medible no negativa f_k tal que $\nu_k(E) = \int_E f_k d\mu_k$ para cualquier conjunto medible E.

Como $\mu_k(E_k^c) = 0$, podemos redefinir f_k de tal forma que sea nula sobre E_k^c, así que $\nu_k(E) = \int_E f_k d\mu$.

Sea $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, entonces f es una función medible no negativa y, para cualquier conjunto medible E, se tiene:

$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(E)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \int_E f d\mu$

■